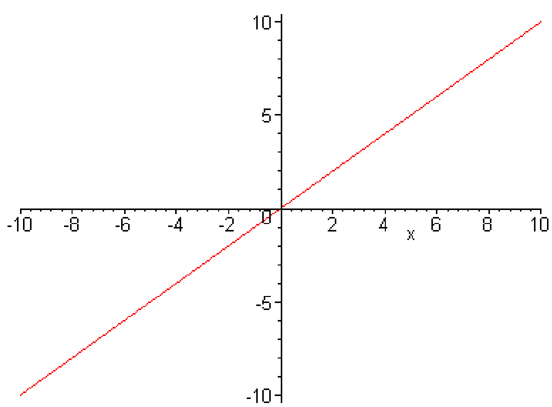
СТЕПЕННА ФУНКЦИЯ

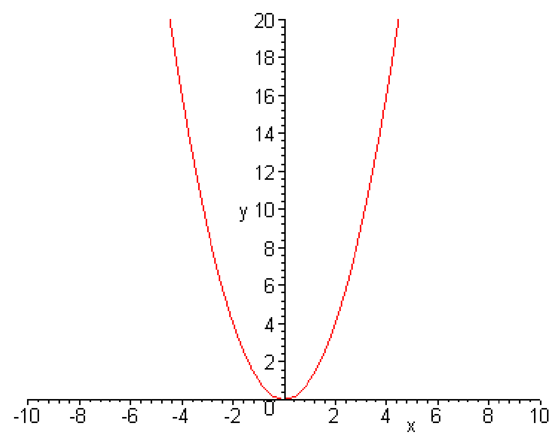
1. Определение, графика и свойства

Степенна функция наричаме функция от вида $y = x^n$, където n е константа.

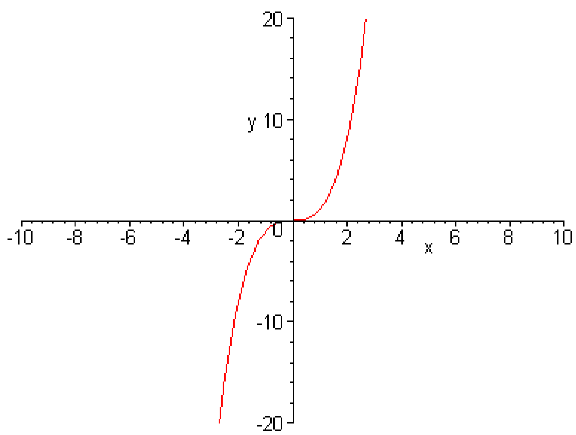
Нека n е естествено число. Функцията е определена за $x \in (-\infty, +\infty)$. Графиките на функцията за стойности на $n = 1, 2, 3$ са показани на фигурите от 1 до 3.



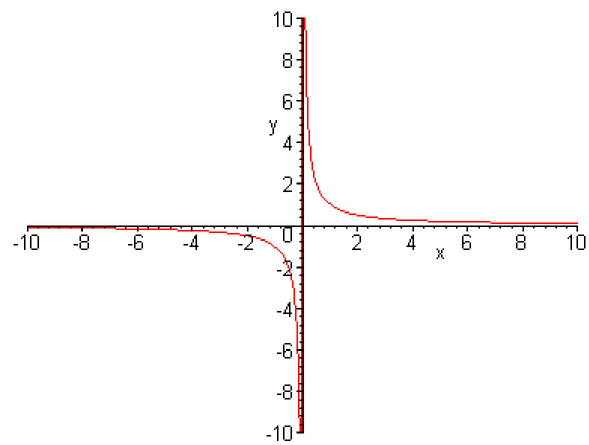
Фиг.1. Графика на функцията $y = x$



Фиг.2. Графика на функцията $y = x^2$

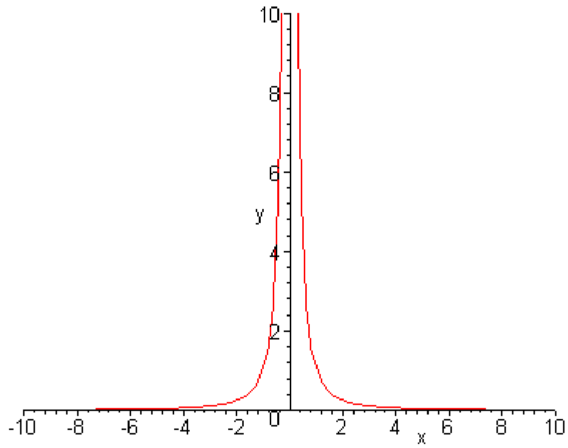


Фиг.3. Графика на функцията $y = x^3$

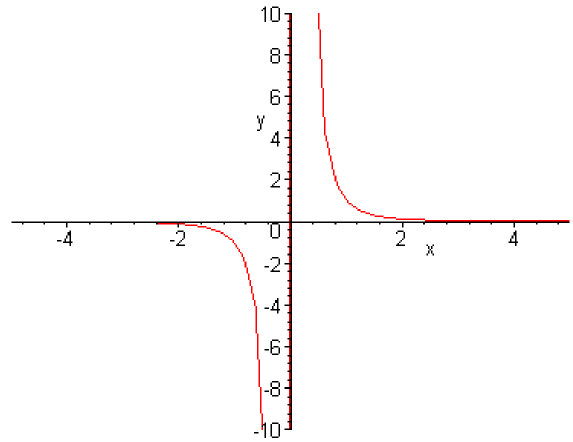


Фиг.4. Графика на функцията $y = x^{-1}$

Нека n е цяло отрицателно число. Функцията е определена за $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Графиките на функцията за стойности на $n = -1, -2, -3$ са показани съответно на фигурите от 4 до 6.

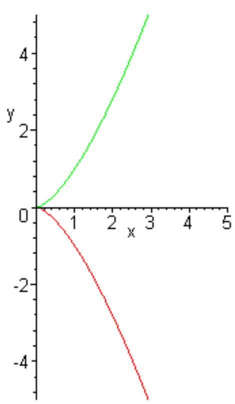


Фиг.5. Графика на функцията $y = x^{-2}$

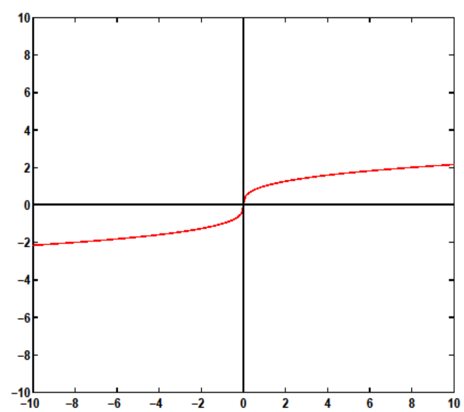


Фиг.6. Графика на функцията $y = x^{-3}$

На фиг.7 и фиг.8 са показани графиките на степенната функция съответно за $n = \frac{3}{2}$ и $n = \frac{1}{3}$.



Фиг.7. Графика на функцията $y = x^{\frac{3}{2}}$



Фиг.8. Графика на функцията $y = x^{\frac{1}{3}}$

Свойства

За $y = x^n, n \geq 0 \Rightarrow x = \sqrt[n]{y}$,

При $n = 2k,\ y \geq 0,\ x \geq 0,\ y = x^{2k}, n \geq 0 \Rightarrow x = \sqrt[2k]{y}$.

При $n = 2k+1,\ y \in R,\ x \in R,\ y = x^{2k+1}, n \geq 0 \Rightarrow x = \sqrt[2k+1]{y}$.

$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$; $\quad x^0 = 1$; $\quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$; $\quad \left(x^m\right)^n = x^{m.n}$;

$x^m.x^n = x^{m+n}$; $\quad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$.

При $n = 2k, \left(-x\right)^n = x^n$.

При $n = 2k+1, \left(-x\right)^n = -x^n$.

2. СТЕПЕН С РАЦИОНАЛЕН ПОКАЗАТЕЛ

Степен с цял показател

Нека a е реално число, а n - естествено число. Произведението на n множителя, равни на a, се означава с a^n.

$a^n = \underbrace{a.a.....a}_{n\ пъти}$

Числото a се нарича **основа**, а n - **степенен показател**.

Изпълнени са следните равенства: $1^n = 1, \quad a^1 = a, \quad 0^n = 0$.

Когато в един израз няма скоби, първо се извършва действие степенуване, след това умножение и деление и накрая събиране и изваждане.

Задача 1. Пресметнете:

а) 11^2; б) $0{,}02^4$; в) $1{,}2^3$; г) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$; д) $\left(1\frac{2}{3}\right)^4$

При m, n - естествени числа и a, b - реални числа са в сила следните **свойства на степените с естествен показател**:

1. $a^m.a^n = a^{m+n}$;	2. $a^n : a^m = a^{n-m}, \quad n > m, \quad a \neq 0$;
3. $(a^n)^m = a^{n.m}$;	4. $(a.b)^n = a^n.b^n$;
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$.	

За свойство 2: Лявата страна на равенството има смисъл при произволни естествени числа m и n, а дясната – само при $n > m$.

Ако $m = n$, изразът в лявата страна ще бъде равен на 1. Това ни дава основание да определим **степен с нулев показател**:

$a^0 = 1$ за всяко $a \neq 0$.

Пример 1. Да се пресметне:

а) $5^2.5^3 = 5^{2+3} = 5^5$; б) $7^2.7^5.7 = 7^{2+5+1} = 7^8$;

в) $2^3.(2 + 2^2) = 2^3.2 + 2^3.2^2 = 2^4 + 2^5 = 16 + 32 = 48$.

Пример 2. $10^6 : 10^2 = 10^4$.

Пример 3. $\frac{2^8 + 2^{10}}{2^8} = \frac{2^8 + 2^8.2^2}{2^8} = \frac{2^8.(1 + 2^2)}{2^8} = 1 + 2^2 = 5$.

Пример 4. $3^5.5^3.\left(\frac{1}{15}\right)^3 = 3^2.3^3.5^3.\left(\frac{1}{15}\right)^3 = 3^2.\left(3.5.\frac{1}{15}\right)^3 = 3^2.1 = 9$.

Пример 5. $20^3 : 5^3 = (20 : 5)^3 = 4^3 = 64$.

Пример 6. $\left(\frac{7^3.7^3}{7^3.7}\right)^2 = \left(\frac{7^6}{7^4}\right)^2 = (7^2)^2 = 49^2 = 2401$.

Степен с отрицателен показател: За всяко $a \neq 0$ и всяко цяло отрицателно число n е изпълнено $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$.

Изразът a^n има смисъл за всяко цяло число n и за всяко реално число $a \neq 0$. Както и при понятието степен с естествен показател, числото a се нарича **основа**, а n - **степенен показател**.

Пример 7.

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}; \qquad 0{,}0001 = \frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}.$$

Изразите $0^0, 0^{-1}, 0^{-2}, \ldots, 0^{-n}$ $(n$- естествено число$)$ нямат смисъл.

Свойства на степените с цял показател

1. $a^m.a^n = a^{m+n}$;	2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$;
3. $\left(a^n\right)^m = a^{n.m}$;	4. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$;
5. $a^0 = 1$;	6. $(a.b)^n = a^n.b^n$;
7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$.	

Пример 1. $2^{-3} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + (-2)^{-2} = \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{(-2)^2} = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$;

Пример 2. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{3}} = 3$ или $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} = \left(3^{-1}\right)^{-1} = 3^{(-1).(-1)} = 3^1 = 3$;

Пример 3. $\dfrac{a^3.a^{-2}}{a^5.a^{-1}} = \dfrac{a^{3+(-2)}}{a^{5+(-1)}} = \dfrac{a^1}{a^4} = a^{(-3)} = \dfrac{1}{a^3}$;

Пример 4. $\dfrac{a^k.a^l}{a^m.a^n} = \dfrac{a^{k+l}}{a^{m+n}} = a^{(k+l)-(m+n)} = a^{k+l-m-n}$;

Пример 5. $\dfrac{x^{-2}(xy)^3}{(xy)^{-2}.y^4} = \dfrac{x^{-2}x^3y^3}{x^{-2}y^{-2}y^4} = x^{-2+3-(-2)}y^{3-(-2)-4} = x^3y$

3. ДРОБНИ СТЕПЕНИ И КОРЕНУВАНЕ

1. Квадратен корен

а) определение

Реалното неотрицателно число b, за което $b^2 = a$ се нарича квадратен корен на числото a.

Квадратният корен от a се означава с $\sqrt{a}$. Знакът $\sqrt{}$ се нарича **корен или радикал.** Действието, с което се намира квадратен корен от дадено число, се нарича **коренуване.**

Накратко: $b = \sqrt{a}$, ако $b^2 = a$ или $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a,\quad \sqrt{a} \geq 0$.

б) Коренуване на точен квадрат:

За всяко реално число a е в сила $\sqrt{a^2} = |a|$.

Свойства на квадратните корени:

1. $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ при $a \geq 0$	2. $\sqrt{a} \geq 0$ при $a \geq 0$
3. $\sqrt{a^2} = \lvert a\rvert = \begin{cases} a & при \quad a \geq 0 \\ -a & при \quad a < 0 \end{cases}$	4. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ при $a \geq 0$, $b \geq 0$
5. $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ при $a \geq 0,\ b > 0$	6. $\sqrt{a^2.b} = \lvert a\rvert.\sqrt{b}$ при $b \geq 0$
7. $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ при $0 \leq a < b$	

Пример 1. $\sqrt{7+\sqrt{4}} = \sqrt{7+\sqrt{2^2}} = \sqrt{7+2} = \sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$.

Пример 2. Да се пресметне стойността на израза:

а) $\sqrt{(x-5)^2}$ при $x = 9$ и $x = 1$; б) $\sqrt{(x-1)^2 + 4x}$ при $x = -13$ и $x = \sqrt{2}$.

Решение: а) $\sqrt{(x-5)^2} = |x-5|$.

При $x = 9$ получаваме $|x-5| = |9-5| = |4| = 4$.

При $x = 1$ получаваме $|x-5| = |1-5| = |-4| = 4$.

б) Имаме $\sqrt{(x-1)^2 + 4x} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + 4x} = \sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$.

При $x = -13$ получаваме $|x+1| = |-13+1| = |-12| = 12$.

При $x = \sqrt{2}$ получаваме $|x+1| = \left|\sqrt{2}+1\right| = \left|\sqrt{2}+1\right| = \sqrt{2}+1$.

Пример 3. $\sqrt{256} = \sqrt{4.64} = \sqrt{4}.\sqrt{64} = 2.8 = 16$;

$\sqrt{27}.\sqrt{12} = \sqrt{27.12} = \sqrt{81.4} = \sqrt{81}.\sqrt{4} = 9.2 = 18$.

Ако $a \geq 0$, $b \geq 0$ и $c \geq 0$ са реални числа, то $\sqrt{abc} = \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}$.

Пример 4. $\sqrt{1764}=\sqrt{4.9.49}=\sqrt{4}.\sqrt{9}.\sqrt{49}=2.3.7=42$.

Пример 5. а) $\sqrt{\frac{49}{169}}=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{169}}=\frac{7}{13}$; б) $\sqrt{2\frac{7}{9}}=\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}}=\frac{5}{3}$;

в) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{2}{8}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$.

Пример 6. а) $\sqrt{45}=\sqrt{9.5}=\sqrt{3^2.5}=3\sqrt{5}$; **б)** $2\sqrt{5}=\sqrt{2^2.5}=\sqrt{20}$.

Във втория случай се казва, че сме **внесли множител под корена.**

Пример 7. Да се сравнят числата:

а) $5\sqrt{6}$ **и** $\sqrt{149}$**;** б) $2\sqrt{3}$ **и** $3\sqrt{2}$**.**

Решение: а) Като внесем множителя под корена, получаваме $5\sqrt{6}=\sqrt{5^2.6}=\sqrt{150}$. Тъй като $150>149$, то $\sqrt{150}>\sqrt{149}$. Следователно $5\sqrt{6}>\sqrt{149}$.

б) Като внесем множителя под корена, получаваме $2\sqrt{3}=\sqrt{2^2.3}=\sqrt{12}$ и $3\sqrt{2}=\sqrt{3^2.2}=\sqrt{18}$. Тъй като $12<18$, то $\sqrt{12}<\sqrt{18}$. Следователно $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$.

Пример 8. Да се опрости изразът $\sqrt{a^3.b}+\sqrt{a.b^3}+\sqrt{a^3.b^3}$ при $a.b\geq 0$ и се намери стойността му при $a=-3$ и $b=-12$.

Решение: Като изнесем съответните множители пред корена, получаваме

$$\sqrt{a^3.b}+\sqrt{a.b^3}+\sqrt{a^3.b^3}=|a|.\sqrt{a.b}+|b|.\sqrt{a.b}+|a.b|.\sqrt{a.b}=\left(|a|+|b|+|a.b|\right)\sqrt{a.b}.$$

При $a=-3$ и $b=-12$ намираме

$$\left(|a|+|b|+|a.b|\right)\sqrt{a.b}=\left(|-3|+|-12|+|36|\right).\sqrt{36}=51\sqrt{36}=306.$$

2. Кубичен корен от a.

Числото b, за което $b^3=a$, където a е реално число.

За всяко реално число b е в сила $\sqrt[3]{b^3}=b$.

3. n- ти корен

n- ти корен наричаме единственото решение на уравнението $x^n=a$, като:

-при n четно естествено число a е неотрицателно реално число;

-при n нечетно a е произволно реално число.

n- ти корен от числото a се бележи с $\sqrt[n]{a}$. Числото n се нарича **коренен показател,** а числото a се нарича **подкоренна величина.**

При $a \geq 0$ и $b > 0$	
1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$;	2. $\sqrt[n]{a^n} = a$;
3. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$;	4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$;
5. $\sqrt[n.k]{a^{n.m}} = \sqrt[k]{a^m}$;	6. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$;
7. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;	8. $\sqrt[n]{a^n.b} = a.\sqrt[n]{b}$;
9. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b$;	10. Ако $0 \leq a < b$, то $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Пример 1. Опростете изразите**:**

а) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} - \dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$; б) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)$.

Решение: а) Като приложим свойствата на кубичния корен, имаме

$$\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} - \frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} = \frac{(a-b)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)-(a+b)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)} =$$

$$= \frac{2a\sqrt[3]{b}-2b\sqrt[3]{a}}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\left(\sqrt[3]{b}\right)^2} = 2.\frac{\sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b^3}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}} =$$

$$= 2.\frac{\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b^2}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}} = 2.\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b} = 2.\sqrt[3]{ab}.$$

Разглежданите преобразувания може да се направят, ако знаменателите са различни от нула, т.е. при $\sqrt[3]{a} \neq \pm\sqrt[3]{b}$. Тъй като $\sqrt[3]{a} = \pm\sqrt[3]{b} \Leftrightarrow a = \pm b$, то $\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} = 2\sqrt[3]{ab}$ при $a \neq \pm b$.

Задача 1. Да се рационализира знаменателят на дробта:

а) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}$; б) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+1}$; г) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}-1}$.

СТЕПЕН С РАЦИОНАЛЕН ПОКАЗАТЕЛ

Ако $a > 0$ и $r = \dfrac{m}{n}$, (m, n - цели числа, $n \geq 2$), то $a^r = \sqrt[n]{a^m}$.

Свойства на степените с рационален показател:

1. $a^0=1$	2. $a^x.a^y=a^{x+y}$
3. $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$	4. $a^x=\frac{1}{a^{-x}}$
5. $\left(a^x\right)^y=\left(a^y\right)^x=a^{x.y}$	6. $(ab)^x=a^x.b^x$
7. $\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}$	8. Ако $a>1$ и $x<y$, то $a^x<a^y$.
9. Ако $0<a<1$ и $x<y$, то $a^x>a^y$.	

Равенство на степени:

- Ако r е рационално число, $r\neq 0$, $x>0$ и $y>0$, то $x^r=y^r \Leftrightarrow x=y$.
- Ако $a>0$, $a\neq 1$, то $a^x=a^y \Leftrightarrow x=y$.

Пример 1. Да се намери степенният показател, ако:

а) $2^x=16$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=81^{-1}$; в) $\left(\frac{1}{4}\right)^x=16$.

Решение: а) Тъй като $16=2^4$, от теоремата за равенство на степени имаме $2^x=16 \Leftrightarrow 2^x=2^4 \Leftrightarrow x=4$.

Задача 1. Опростете израза и пресметнете стойността му:

а) $\frac{\left(3^{-2}\right)^3.\left(5^3\right)^{-2}}{15^{-7}}$; б) $\frac{(-2)^{-5}.3^{-3}}{6^{-4}}$.

Задача 2. Опростете израза като запишете отговора само с положителни степенни показатели:

а) $\sqrt{\frac{u^{-2}v^4}{25^{-1}}}$, $u>0$; б) $\sqrt{\frac{u^{-2}v^4}{25^{-1}}}$, $u<0$.

Задача 3. Намерете неизвестния степенен показател:

а) $2^x=32$; б) $2^x=1$; в) $2^x=\frac{1}{2}$; г) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{27}$.

ПОКАЗАТЕЛНА И ЛОГАРИТМИЧНА ФУНКЦИЯ. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

1. ПОКАЗАТЕЛНА ФУНКЦИЯ

Функцията $y = a^x$, където $a > 0, a \neq 1,$ е дадено положително реално число, а $x \in R$ е независима реална променлива, се нарича **показателна функция**. Числото $\mathbf{a}$ се нарича **основа**.

Основни свойства на показателната функция

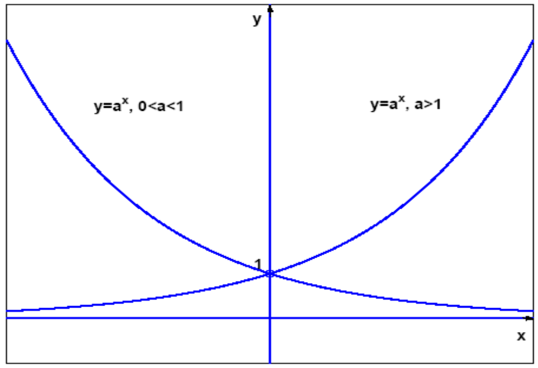
1. Показателната функция приема само положителни стойности.
2. Всяко положително реално число е стойност на функцията $\mathbf{y = a^x}$ при $\mathbf{a \neq 1}$. При това показателната функция няма най-голяма или най-малка стойност.
3. Ако $\mathbf{x = 0}$, то $\mathbf{y = a^x = a^0 = 1}$, т.е. графиката на функцията минава през точката $\mathbf{(0,1)}$.
4. Ако $\mathbf{a > 1}$, то $\mathbf{y = a^x}$ е растяща функция, т.е. ако $\mathbf{x_1 < x_2}$, то $\mathbf{a^{x_1} < a^{x_2}}$.
5. Ако $\mathbf{0 < a < 1}$, то $\mathbf{y = a^x}$ е намаляваща функция, т.е. ако $\mathbf{x_1 < x_2}$, то $\mathbf{a^{x_1} > a^{x_2}}$.

Сравняване на степени с равни основи

$\left\vert \begin{array}{l} a > 1 \\ x < y \end{array} \right. \Rightarrow a^x < a^y$	$\left\vert \begin{array}{l} a > 1 \\ a^x < a^y \end{array} \right. \Rightarrow x < y$
$\left\vert \begin{array}{l} 0 < a < 1 \\ x < y \end{array} \right. \Rightarrow a^x > a^y$	$\left\vert \begin{array}{l} 0 < a < 1 \\ a^x > a^y \end{array} \right. \Rightarrow x < y$
$\left\vert \begin{array}{l} x < y \\ a^x < a^y \end{array} \right. \Rightarrow a > 1$	$\left\vert \begin{array}{l} x < y \\ a^x > a^y \end{array} \right. \Rightarrow 0 < a < 1$
$\left\vert \begin{array}{l} a > 0 \\ x = y \end{array} \right. \Rightarrow a^x = a^y$	$\left\vert \begin{array}{l} a > 0 \\ a^x = a^y \end{array} \right. \Rightarrow x = y$

Тази таблица се използва при решаване на показателни уравнения и неравенства.

Графиката на показателната функция е показана на фиг.1.



Фиг.1. Графика на показателната функция

2. ЛОГАРИТМИ И ЛОГАРИТМИЧНА ФУНКЦИЯ

Нека $\mathbf{a,b>0}$ и $\mathbf{a\neq 1}$. Числото $x=\log_a b$ се нарича логаритъм от b при основа a, ако и само ако $a^x=b$.

Числото $\mathbf{a}$ се нарича основа на логаритъма. Ако основата $\mathbf{a=10}$, логаритъмът се нарича десетичен: $\mathbf{\log_{10} b=\lg b}$.

Основни свойства на логаритмите $(\mathbf{a>0,a\neq 1})$:

1. $\mathbf{\log_a(bc)=\log_a|b|+\log_a|c|}$;
2. $\mathbf{\log_a(b/c)=\log_a|b|-\log_a|c|}$;
3. $\mathbf{\log_a(b^n)=n\log_a|b|}$, където $\mathbf{n\in R}$;
4. $\mathbf{\log_{a^n} b=\frac{1}{n}\log_{|a|} b}$, където $\mathbf{n\in R}$.

Формули за смяна на основата:

5. $\mathbf{\log_a b=\dfrac{\log_c|b|}{\log_c|a|},\quad c>0,c\neq 1}$;
6. $\mathbf{\log_a b=\dfrac{1}{\log_b|a|}}$ **при** $\mathbf{b>0,b\neq 1}$.

Други:

7. $\mathbf{\log_a a=1}$; 8. $\mathbf{\log_a 1=0}$;

9. $\mathbf{a^{\log_a b}=b}$; 10. $\mathbf{b^{\log_a c}=c^{\log_a b}}$.

Функцията $\mathbf{y=\log_a x}$, където $\mathbf{a\in R^+\setminus\{1\}}$ е дадено положително реално число, различно от единица, а $\mathbf{x\in R^+}$ е независима реална положителна променлива, се нарича **логаритмична функция**. Числото $\mathbf{a}$ се нарича **основа**.

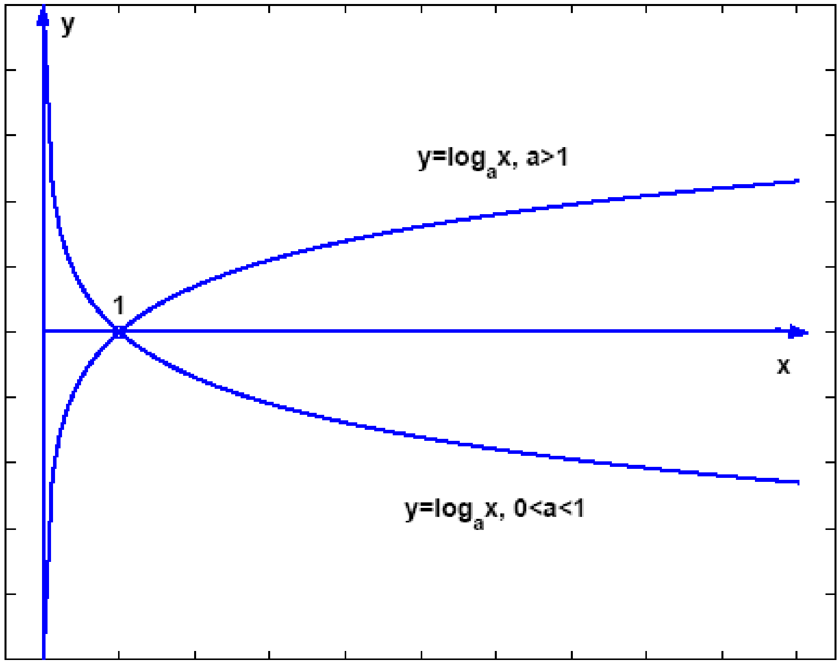
Свойства на логаритмичната функция:

1. Функцията $y = \log_a x$ е определена само при $x > 0$, т.е. графиката й е разположена вдясно от ординатната ос Oy (в I и IV квадрант);
2. Всяко реално число е стойност на функцията $y = \log_a x$, т.е. за всяко реално число y съществува такова x, че $a^y = x$, следователно функцията няма най-голяма и най-малка стойност;
3. Ако $x = 1$, то $y = \log_a 1 = 0$, т.е. графиката на функцията $y = \log_a x$ пресича абсцисната ос Ox в точката $(1,0)$;
4. Ако $a > 1$, то функцията $y = \log_a x$ е растяща, т.е. ако $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 < \log_a x_2$.
5. Ако $0 < a < 1$, то функцията $y = \log_a x$ е намаляваща, т.е. ако $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 > \log_a x_2$.

Сравняване на логаритми с равни основи

$\left\| \begin{array}{l} a > 1 \\ 0 < x < y \end{array} \right. \Rightarrow \log_a x < \log_a y$	$\left\| \begin{array}{l} a > 1 \\ \log_a x < \log_a y \end{array} \right. \Rightarrow x < y$
$\left\| \begin{array}{l} 0 < a < 1 \\ 0 < x < y \end{array} \right. \Rightarrow \log_a x > \log_a y$	$\left\| \begin{array}{l} 0 < a < 1 \\ \log_a x > \log_a y \end{array} \right. \Rightarrow x < y$
$\left\| \begin{array}{l} 0 < x < y \\ \log_a x < \log_a y \end{array} \right. \Rightarrow a > 1$	$\left\| \begin{array}{l} 0 < x < y \\ \log_a x > \log_a y \end{array} \right. \Rightarrow 0 < a < 1$
$\left\| \begin{array}{l} a > 0, a \neq 1 \\ x = y > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \log_a x = \log_a y$	$\left\| \begin{array}{l} a > 0, a \neq 1 \\ \log_a x = \log_a y \end{array} \right. \Rightarrow x = y$

Графиката на логаритмичната функция е показана на фиг.2.



Фиг.2. Графика на логаритмичната функция

3. ПОКАЗАТЕЛНИ И ЛОГАРИТМИЧНИ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Пример 1. Решете уравнението:

а) $2^x = 16$ б) $3^{2x+1} = 81$ в) $5^{-x} = 125$ г) $4^x = 128$

Решение: а) Представяме 16 като 2 на степен 4 и приравняваме степенните показатели: $2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$;

б) $3^{2x+1} = 81 \Rightarrow 3^{2x+1} = 3^4 \Rightarrow 2x+1 = 4 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$;

в) $5^{-x} = 125 \Rightarrow 5^{-x} = 5^3 \Rightarrow -x = 3 \Rightarrow x = -3$;

г) $4^x = 128 \Rightarrow 2^{2x} = 2^7 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$.

Пример 2. Решете уравнението:

а) $3^{x+1} + 3^x = 36$ б) $5^{x-1} - 5^{x-2} = 100$

в) $3.2^{x+1} + 5.2^{x+2} - 2^{x+3} = 36$.

Решение: а) $3^{x+1} + 3^x = 36 \Rightarrow 3.3^x + 3^x = 36 \Rightarrow 4.3^x = 36 \Rightarrow 3^x = 9 \;\; x = 2$;

б) $\frac{1}{5}.5^x - \frac{1}{25}.5^x = 100 \Rightarrow \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25}\right).5^x = 100 \Rightarrow \frac{4}{25}.5^x = 100 \Rightarrow 5^x = 625 \Rightarrow 5^x = 5^4 \Rightarrow x = 4$;

в) $3.2^{x+1}+5.2^{x+2}-2^{x+3}=36 \Rightarrow 6.2^{x}+20.2^{x}-8.2^{x}=36 \Rightarrow 18.2^{x}=36 \Rightarrow 2^{x}=2 \Rightarrow x=1$.

Пример 3. Решете уравнението:

а) $9^{x}-3^{x}=72$ б) $3.5^{2x}-2.5^{x}=1$

Решение: а) $3^{2x}-3^{x}=72 \Rightarrow$ полагаме $y=3^{x} \Rightarrow y^{2}-y-72=0$. Решаваме квадратното уравнение и получаваме: $y_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4.72}}{2}=\dfrac{1\pm 17}{2} \Rightarrow y_{1}=9$, $y_{2}=-8$. При $y_{1}=9$ от полагането получаваме: $9=3^{x} \Rightarrow x=2$. При $y_{2}=-8$ от полагането получаваме: $-8=3^{x} \Rightarrow x\in\varnothing$.

б) Полагаме $y=5^{x} \Rightarrow 3y^{2}-2y-1=0 \Rightarrow y_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{4+4.3}}{2.3}=\dfrac{2\pm 4}{6} \Rightarrow y_{1}=1$, $y_{2}=-1/3$. При $y_{1}=1$ от полагането получаваме: $1=3^{x} \Rightarrow x=0$. При $y_{2}=-1/3$ уравнението няма решение. Отговор: $x=0$.

Забележка. Когато решаваме уравнение от вида $a^{x}=b$ и не можем лесно да представим числото b като някаква степен на числото a, то отговорът се записва чрез логаритъм.

Пример 4. Решете уравненията:

а) $9^{x}=10$ б) $6^{2x}-4.6^{x}+3=0$

Решение: а) $x=\log_{9}10$;

б) Полагаме $y=6^{x} \Rightarrow y^{2}-4y+3=0 \Rightarrow y_{1}=1$, $y_{2}=3$. При $y_{1}=1$ от полагането получаваме: $6^{x}=1 \Rightarrow x=0$. При $y_{2}=3$ получаваме: $6^{x}=3 \Rightarrow x=\log_{6}3$.

Пример 5. Решете неравенствата:

а) $2^{x}\geq 16$ б) $3^{2x}\leq 243$ в) $5^{-x}>625$ г) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}<128$

Решение: а) Представяме 16 като 2 на степен 4. Съобразяваме, че основата е по-голяма от 1 и премахваме основите, като запазваме посоката на неравенството: $2^{x}\geq 2^{4} \Rightarrow x\geq 4$;

б) $3^{2x}\leq 243 \Rightarrow 3^{2x}\leq 3^{5} \Rightarrow 2x\leq 5 \Rightarrow x\leq\dfrac{5}{2}$;

в) $5^{-x}>625 \Rightarrow 5^{-x}>5^{4} \Rightarrow -x>4 \Rightarrow x<-4$;

г) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 128 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x < 2^7 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-7} \Rightarrow \mathbf{x > -7}$ (посоката на неравенството се променя, защото основата е по-малка от 1).

Пример 6. Решете уравненията:

а) $\log_5(3x-2)=1$ б) $\log_3(2x+1)=2$ в) $\lg(3x^2-5x+8)=1$

Решение: **а)** Определяме дефиниционната област: $3x-2>0 \Rightarrow x>2/3$. Антилогаритмуваме уравнението и получаваме: $3x-2=5^1 \Rightarrow 3x=7 \Rightarrow x=7/3$, което принадлежи на дефиниционната област и е решение.

б) Определяме дефиниционната област: $2x+1>0 \Rightarrow x>-1/3$. От $\log_3(2x+1)=2 \Rightarrow (2x+1)=3^2 \Rightarrow 2x+1=9 \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4$, което принадлежи на дефиниционната област и е решение.

в) Определяме дефиниционната област: $3x^2-5x+8>0$ е изпълнено за всяко $x \in \mathbf{R}$, защото дискриминантата е $D=(-5)^2-4.3.8=-71<0$ и водещият коефициент на квадратното неравенство е положителен. От $\lg(3x^2-5x+8)=1$ получаваме $3x^2-5x+8=10^1 \Rightarrow 3x^2-5x-2=0 \Rightarrow x_1=2$, $x_2=-1/3$.

Пример 7. Решете уравненията:

а) $\lg(2x+1)+\lg(5x+2)=\frac{1}{2}\lg 81$

б) $\log_3(2x+1)-\log_3(x-1)=2\log_3\sqrt{3}$

Решение: **а)** Определяме дефиниционната област: $\left|\begin{array}{l}2x+1>0\\5x+2>0\end{array}\right. \Rightarrow$ $DO: x>-2/5$. От свойствата на логаритъма следва: $\lg(2x+1)+\lg(5x+2)=\frac{1}{2}\lg 81 \Rightarrow \lg(2x+1)(5x+2)=\lg\sqrt{81} \Rightarrow (2x+1)(5x+2)=9 \Rightarrow 10x^2+9x-7=0$ $\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{81+4.10.7}}{2.10}=\frac{-9\pm 19}{20} \Rightarrow x_1=\frac{1}{2}\in DO$, $x_2=-\frac{7}{5}\notin DO$.

б) Определяме дефиниционната област: $\left|\begin{array}{l}2x+1>0\\x-1>0\end{array}\right. \Rightarrow DO: x>1$. От свойствата на логаритъма следва: $\log_3(2x+1)-\log_3(x-1)=2\log_3\sqrt{3} \Rightarrow$ $\log_3\frac{2x+1}{x-1}=\log_3\sqrt{3}^2 \Rightarrow \frac{2x+1}{x-1}=3 \Rightarrow 2x+1=3(x-1) \Rightarrow x=4\in DO$.

Пример 8. Решете неравенствата:

а) $\log_2 x \geq 4$ б) $\log_3 x < 2$ в) $\log_{0,5} x \leq 2$ г) $\log_{0,25} x > 0,5$

Решение: а) Определяме дефиниционната област: $DO: x > 0$. Антилогаритмуваме, като запазваме посоката на неравенството: $\log_2 x \geq 4$ $\Rightarrow$ $x \geq 2^4 \Rightarrow x \geq 16 \in DO$.

б) Определяме дефиниционната област: $DO: x > 0$. От $\log_3 x < 2$ $\Rightarrow$ $x < 3^2$ $\Rightarrow$ $x < 9$. Като вземем предвид и дефиниционната област, получаваме решението $x \in (0;9)$.

в) Определяме дефиниционната област: $DO: x > 0$. Основата на логаритъма е по-малка от 1, затова от $\log_{0,5} x \leq 2$ $\Rightarrow$ $x \geq 0,5^2$ $\Rightarrow$ $x \geq 0,25$. Като вземем предвид и дефиниционната област, получаваме решението $x \in [0,25;\infty)$.

г) Определяме дефиниционната област: $DO: x > 0$. Основата на логаритъма е по-малка от 1, затова от $\log_{0,25} x > 0,5$ $\Rightarrow$ $x < 0,25^{0,5} \Rightarrow$ $x < 0,25^{1/2} = \sqrt{0,25} = 0,5$. Следователно решението е $x \in (0;0,5)$.

Задача 1. Решете уравнението:

а) $2^x = 1024$ б) $3^{5x-2} = 27$ в) $5^x = \dfrac{1}{125}$ г) $4^x = 32$

Задача 2. Решете уравнението:

а) $3^{x-1} + 3^{x+1} = 90$ б) $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$ в) $2^{x+1} + 3.2^{x-1} - 5.2^x = -12$.

Задача 3. Решете уравнението:

а) $16^x - 4^x = 12$ б) $25^x - 20.5^x = 125$

Задача 4. Решете уравненията:

а) $8^x = 100$ б) $3^{2x} - 3.3^x + 2 = 0$.

Задача 5. Решете неравенствата:

а) $4^x \geq 16$ б) $3^{2x} \leq 27$ в) $0.5^{-x} > 4$ г) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x < 25$.

Задача 6. Решете уравненията:

а) $\log_6(3x-2) = 0$ б) $\log_2(3x+1) = -2$ в) $\lg(3x^2 - 8) = 2$.

Задача 7. Решете уравненията:

а) $\lg(3x+1) + \lg(5x-5) = \lg 100$ б) $\log_4(2x+4) - \log_4(3x-2) = 1$.